

7. CIĄGI – zadania

Zad.7.1. Wyznacz cztery początkowe wyrazy ciągu o wyrazie ogólnym

$$\text{a) } a_n = \frac{2n-3}{3n} \quad \text{b) } b_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

Zad.7.2. Który wyraz ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 3n - 1$ jest równy 3?

Zad.7.3. Ile wyrazów ciągu $a_n = 2 - 3n$ jest większych od -12 i mniejszych od 20 ?

Zad.7.4. Sporządź wykres ciągu podanego wzorem ogólnym

$$\text{a) } a_n = (-1)^n - 1 \quad \text{b) } b_n = 2n + 1 \quad n < 5$$

Zad.7.5. Zbadaj monotoniczność ciągu

$$\text{a) } a_n = n^2 - n + 1 \quad \text{b) } a_n = \frac{-n}{2n+1} \quad \text{c) } a_n = 3 - \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{d) } a_n = (n-1)(n-2)$$

Zad.7.6. Dany jest ciąg arytmetyczny: $3, -1, -5, -9, \dots$

Podaj wzór na wyraz ogólny tego ciągu. Oblicz siedemnasty wyraz tego ciągu.

Zad.7.7. Zbadaj, który z podanych ciągów jest ciągiem arytmetycznym.

$$\text{a) } a_n = 5n - 3 \quad \text{b) } a_n = n^2 - 3n \quad \text{c) } a_n = \frac{2n+3}{4}$$

Zad.7.8. Sprawdź, czy liczby $\frac{1}{\sqrt{2}-1}, \sqrt{2}, \sqrt{2}-1$ tworzą ciąg arytmetyczny.

Zad.7.9. Wyznacz te wartości x , dla których liczby $x+1; x+2, x^2+4x+5$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Zad.7.10. Znajdź piąty wyraz ciągu arytmetycznego, w którym:

$$\text{a) } a_1 = -3, r = 2 \quad \text{b) } a_1 = 4, a_3 = 9$$

Zad.7.11. Wyznacz ciąg arytmetyczny, jeśli

$$\text{a) } a_7 = -2 \quad \text{i} \quad a_{13} = 2$$

$$\text{b) } \begin{cases} a_2 = 8 \\ a_5 + a_7 = 40 \end{cases}$$

Zad.7.12. Oblicz sumę $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 55$

Zad.7.13. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1.

Zad.7.14. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, jeśli $a_6 = 1$ i $a_8 = 3$.

Zad.7.15. W ciągu arytmetycznym $a_1 = 30, r = -3$. Ostatni wyraz tego ciągu stanowi $\frac{1}{8}$ część sumy

wszystkich pozostałych wyrazów tego ciągu.

a) Ile wyrazów ma ten ciąg?

b) Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu.

Zad.7.16. Wyznacz wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego, wiedząc że suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest określona wzorem $S_n = -3n^2 + 6n$.

Zad.7.17. Dany jest ciąg arytmetyczny : $a_1 = 3, r = 2$. Oblicz sumę stu początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych.

Zad.7.18. Pożyczkę w wysokości 8700 zł, zaciągniętą w banku, należy spłacić w 12 ratach, z których każda następna jest mniejsza od poprzedniej o 50 zł. Oblicz wysokość pierwszej i ostatniej raty.

Zad.7.19. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Obwód tego trójkąta jest równy 24. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Zad.7.20. Wyznacz współczynniki p, q w równaniu kwadratowym $x^2 + px + q = 0$, wiedząc, że ciąg liczbowy $p, 12, q$ jest ciągiem arytmetycznym, a równanie kwadratowe ma dokładnie jedna rozwiązanie.

Zad.7.21. Dany jest ciąg geometryczny: $3, 6, 12, 24, \dots$. Oblicz jedenasty wyraz tego ciągu.

Zad.7.22. Zbadaj, który z podanych ciągów jest ciągiem geometrycznym

a) $a_n = 6^{n+2}$ b) $a_n = 3^{n-1} - 3^n$ c) $a_n = n^2 + 2n$

Zad.7.23. Sprawdź, czy liczby $\sqrt{3} + 1, 3 + \sqrt{3}, 3\sqrt{3} + 1$ tworzą ciąg geometryczny.

Zad.7.24. Wyznacz te wartości x , dla których liczby $x + 1, x + 2, x + 5$ w podanej kolejności są siódmym, ósmym i dziewiątym wyrazem ciągu geometrycznego.

Zad.7.25. Znajdź piąty wyraz ciągu geometrycznego, w którym:

a) $a_1 = -3, q = 2$ b) $a_1 = 4, a_3 = 9$

Zad.7.26. Wyznacz ciąg geometryczny, jeśli

a) $a_3 = -4, a_4 = 0,25$

b) $a_6 = \frac{1024}{243}, a_{11} = 1$

Zad.7.27. Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, jeśli $a_6 = 1$ i $a_8 = 9$.

Zad.7.28. Oblicz sumę $\frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{243}{64}$

Zad.7.29. Iloraz ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{3}$, a suma jego pięciu początkowych wyrazów

wynosi -605 .

- a) Znajdź pierwszy wyraz tego ciągu.
b) Określ monotoniczność tego ciągu.

Zad.7.30. Suma trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 62. Różnica wyrazów trzeciego i drugiego jest pięć razy większa od różnicy wyrazów drugiego i pierwszego. Wyznacz ten ciąg.

Zad.7.31. Trzy liczby, których suma jest równa 7 tworzą ciąg geometryczny malejący. Największa z nich jest iloczynem liczby $\frac{4}{3}$ i sumy pozostałych. Wyznacz te liczby.

Zad.7.32. Pewne urządzenie w fabryce ulega szybkiemu zużyciu i jego wartość rynkowa jest równa połowie wartości sprzed roku. Oblicz cenę nowego urządzenia wiedząc, że po siedmiu latach eksploatacji jest warte 5 tys. złotych.

Zad.7.33. Suma trzech liczb tworzących ciąg arytmetyczny jest równa 15. Jeżeli od drugiej liczby odejmiemy jeden, a pozostałe pozostawimy bez zmian, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz wyrazy ciągu arytmetycznego

Zad.7.34. Trzy różne liczby, których suma jest równa 63, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są pierwszym, czwartym i szesnastym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Jakie to liczby?

Zad.7.35. Między liczby 2 i 12 wstaw dwie liczby tak, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a trzy pozostałe ciąg arytmetyczny.

Zad.7.36. Jaki dochód przyniesie ci po trzech latach lokata 10 000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym w wysokości 8%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał?

Zad.7.37. Pan Kowalski założył w banku dwuletnią lokatę terminową w kwocie 5000zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty w skali rocznej, jeżeli kapitalizacja odsetek następowała co pół roku i po dwóch latach na koncie pana Kowalskiego była kwota 7320,50 zł?

Zad.7.38. Pan X pożyczył od pana Y pewną kwotę pieniędzy. Panowie umówili się, że pożyczka nie będzie spłacana w ratach, ale cała kwota wraz z odsetkami zostanie zwrócona jednorazowo. Ustalono, że oprocentowanie pożyczki wynosić będzie 50% w skali roku, z roczną kapitalizacją odsetek. Jaką kwotę pożyczył pan X, jeżeli po pięciu latach oddał panu Y 243 000 zł?

ODPOWIEDZI:

Zad.7.1. a) $a_1 = -\frac{1}{3}; a_2 = \frac{1}{6}; a_3 = \frac{1}{3}; a_4 = \frac{5}{12}$

b) $b_1 = 1; b_2 = \frac{1}{3}; b_3 = \frac{1}{6}; b_4 = \frac{1}{10}$

Zad.7.2. czwarty

Zad.7.3. cztery

Zad.7.4. Wskazówka: należy obliczyć wyrazy tego ciągu.

a) $a_1 = -2; a_2 = 0; a_3 = -2; a_4 = 0; \dots$

b) $b_1 = 3; b_2 = 2; b_3 = 7; b_4 = 9$

Zad.7.5. a) rosnący b) malejący c) nie jest monotoniczny d) niemalejący

Zad.7.6. $a_n = 7 - 4n \quad a_{17} = -61$

Zad.7.7. a) i c) tak b) nie

Zad.7.8. tak

Zad.7.10. a) $a_5 = 5$ b) $a_5 = 14$

Zad.7.11. a) $a_1 = -6, r = \frac{2}{3}$ b) $a_1 = 5, r = 3$

Zad.7.12. 532

Zad.7.13. 1210

Zad.7.14. 5

Zad.7.15. a) 6 lub 33 b) $a_6 = 15$ lub $a_{33} = -66$

Zad.7.16. $a_n = 9 - 6n$

Zad.7.17. 20300

Zad.7.18. Pierwsza rata wynosi 1000 zł, a ostatnia 450 zł.

Zad.7.19. 6,8,10.

Zad.7.20. $p = -12, q = 36$ lub $p = 8, q = 16$

Zad.7.21. 3072

Zad.7.22. a) b) tak c) nie

Zad.7.23. nie

Zad.7.24. $x = -\frac{1}{2}$

Zad.7.25. a) $a_5 = -48$ b) $a_5 = \frac{81}{4}$

Zad.7.26. a) $a_1 = -1024, q = -\frac{1}{16}$ b) $a_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^{10}, q = \frac{3}{4}$

Zad.7.27. $S_8 = \frac{3280}{243}$ lub $S_8 = \frac{1640}{243}$

Zad.7.28. $\frac{6305}{576}$

Zad.7.29. a) $a_1 = -405$ b) ciąg jest rosnący

Zad.7.30. $a_1 = \frac{62}{3}, q = 1$ lub $a_1 = 2, q = 5$

Zad.7.31. 4,2,1

Zad.7.32. 640 000 zł

Zad.7.33. 8,5,2 lub 2,5,8

Zad.7.34. 3,12,48

Zad.7.35. 4,8 lub $-3, \frac{9}{2}$

Zad.7.36. około 2682,42 zł

Zad.7.37. 20%

Zad.7.38. 32 000 zł